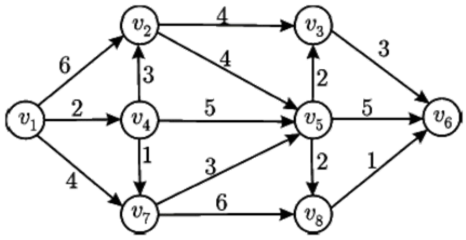
EJEMPLOS DE GRAFOS PONDERADOS PARA CLASE MATEMÁTICAS-1

21/12/2010

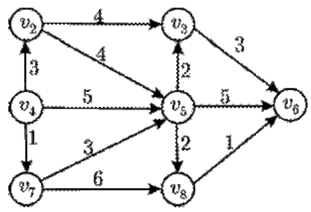
1º.- Para aplicar algoritmo de numeración

$i = 1.$
$V^{(1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_1 \in V^{(1)}$ / $d_e(v_1) = 0.$



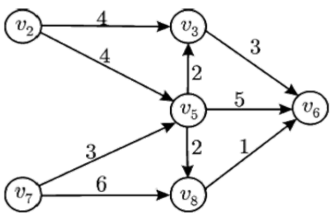
Numeramos v_1 *con* 1.
Eliminamos v_1 *de* $V^{(1)}$, *es decir,*
$V^{(2)} = V^{(1)} \sim \{v_1\}.$

$i = 2.$
$V^{(2)} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_4 \in V^{(2)}$ / $d_e(v_4) = 0.$



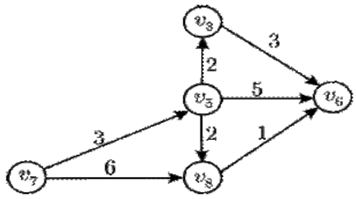
Numeramos v_4 *con* 2.
Eliminamos v_4 *de* $V^{(2)}$, *es decir,*
$V^{(3)} = V^{(2)} \sim \{v_4\}.$

$i = 3.$
$V^{(3)} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_2 \in V^{(3)}$ / $d_e(v_2) = 0.$



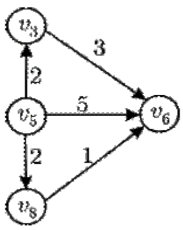
Numeramos v_2 *con* 3.
Eliminamos v_2 *de* $V^{(3)}$, *es decir,*
$V^{(4)} = V^{(3)} \sim \{v_2\}.$

$i = 4.$
$V^{(4)} = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_7 \in V^{(4)}$ / $d_e(v_7) = 0.$



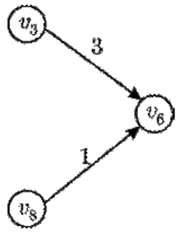
Numeramos v_7 *con* 4.
Eliminamos v_7 *de* $V^{(4)}$, *es decir,*
$V^{(5)} = V^{(4)} \sim \{v_7\}.$

$i = 5.$
$V^{(5)} = \{v_3, v_5, v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_5 \in V^{(5)}$ / $d_e(v_5) = 0.$



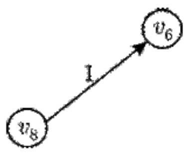
Numeramos v_5 *con* 5.
Eliminamos v_5 *de* $V^{(5)}$, *es decir,*
$V^{(6)} = V^{(5)} \sim \{v_5\}.$

$i = 6.$
$V^{(6)} = \{v_3, v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_3 \in V^{(6)}$ / $d_e(v_3) = 0.$



Numeramos v_3 *con* 6.
Eliminamos v_3 *de* $V^{(6)}$, *es decir,*
$V^{(7)} = V^{(6)} \sim \{v_3\}.$

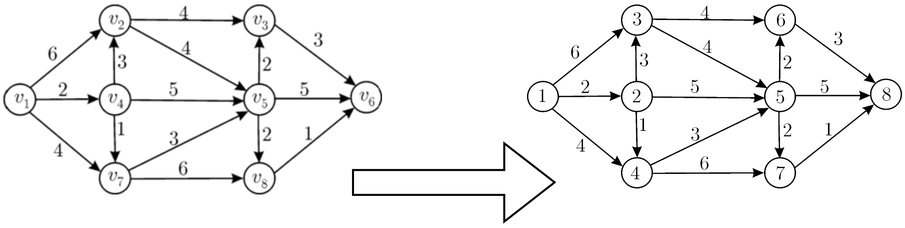
$i = 7.$
$V^{(7)} = \{v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_8 \in V^{(7)}$ / $d_e(v_8) = 0.$



Numeramos v_8 *con* 7.
Eliminamos v_8 *de* $V^{(7)}$, *es decir,*
$V^{(8)} = V^{(7)} \sim \{v_8\}.$

$i = 8.$
$V^{(8)} = \{v_6\}.$
Tomamos $v_6 \in V^{(8)}$ / $d_e(v_6) = 0.$

Numeramos v_6 *con* 8.
Eliminamos v_6 *de* $V^{(8)}$, *es decir,*
$V^{(9)} = V^{(8)} \sim \{v_6\} = \emptyset.$



Con esta numeración de los vértices podemos aplicar las ecuaciones de Bellman para calcular los caminos más cortos del vértice 1 a todos los demás vértices.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_j &= \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \min\{u_1 + \omega_{12}\} = 2, \\ u_3 &= \min\left\{u_1 + \omega_{13}, \underline{u_2 + \omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5, \\ u_4 &= \min\left\{u_1 + \omega_{14}, \underline{u_2 + \omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3, \\ u_5 &= \min\left\{u_2 + \omega_{25}, u_3 + \omega_{35}, \underline{u_4 + \omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6, \\ u_6 &= \min\left\{u_3 + \omega_{36}, \underline{u_5 + \omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8, \\ u_7 &= \min\left\{u_4 + \omega_{47}, \underline{u_5 + \omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8, \\ u_8 &= \min\left\{u_5 + \omega_{58}, u_6 + \omega_{68}, \underline{u_7 + \omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9. \end{aligned}$$

Los pesos de los caminos más cortos son:

Vértice	v1	v4	v2	v7	v5	v3	v8	v6
Numer.	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso	u1=0	u2=2	u3=5	u4=3	u5=6	u6=8	u7=8	u8=9

Para localizar los caminos más cortos examinamos dónde se han alcanzado los mínimos en los cálculos de las ecuaciones de Bellman.

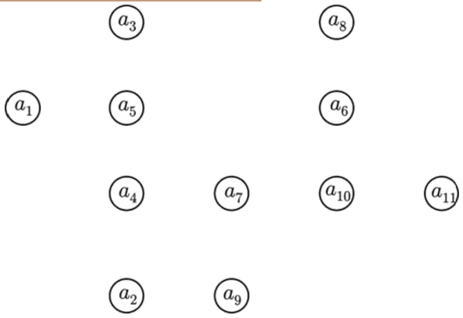
GRAFOS SOBRE APLICACIONES PERT

▪**EJEMPLO-1: PERT** (Proyect Evaluation Research Task)

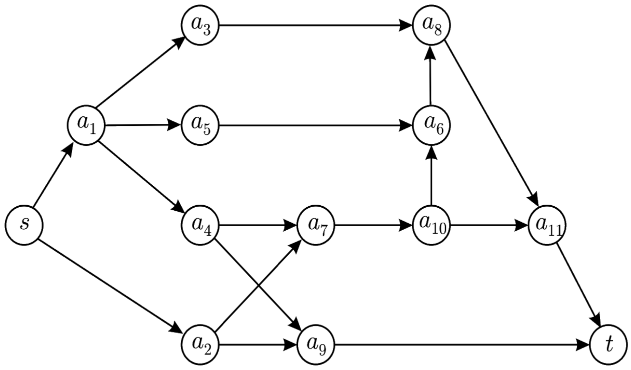
Tabla que muestra una **lista de actividades** a1, a2,…a11 de un proyecto. Para cada una de ellas se indica el **tiempo en días** necesario y las actividades que deben completarse antes de poder iniciarse. A partir de la tabla **representaremos el grafo ponderado**

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

1º: Cada actividad es un vértice

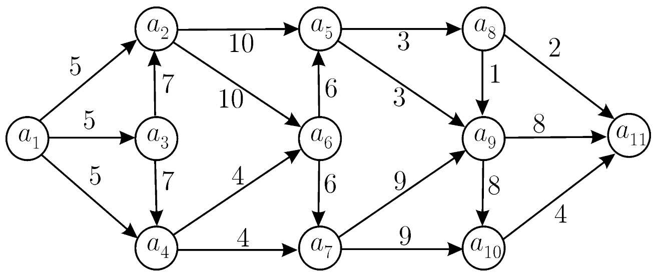


2º Dibujamos arcos y añadimos vértices ficticios "s" y "t"



EJEMPLO-2 PERT

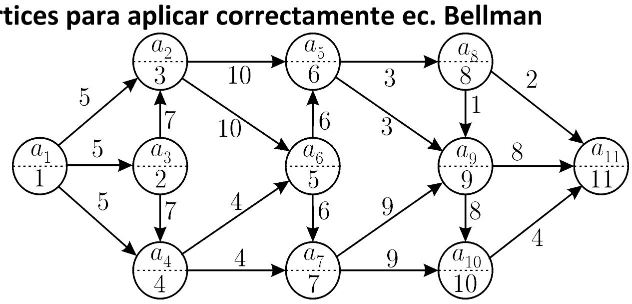
Sea Grafo de un proyecto de secuenciación de actividades.
Pesos de arcos: tiempo en días
Act.inicial: a1;
Act. Final: a11



>> Calcular el mínimo nº de días para completar el proyecto.
>> Identificar camino crítico
>> ¿Cuántos días puede retrasarse la actividad a5 sin afectar a la duración del proyecto?

Soluc:

- **1º: Renumerar los vértices para aplicar correctamente ec. Bellman**

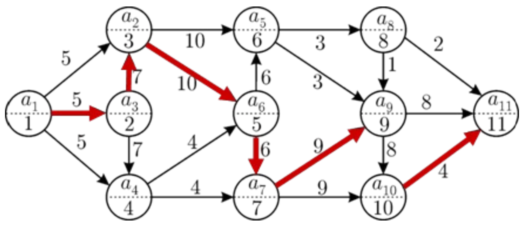


2ª: Aplicar ec. de Bellman

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \text{máx}\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \text{máx}\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \text{máx}\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \text{máx}\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \text{máx}\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \text{máx}\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \text{máx}\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \text{máx}\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \text{máx}\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \text{máx}\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \text{máx}\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$

Mínimo nº de días para completar el proyecto: 49

3º: Identificar el camino crítico



Camino crítico: 1 2 3 5 7 9 10 11

Actividades críticas: a1 a3 a2 a6 a7 a9 a10 a11

Para contestar a la pregunta 3º del ejemplo-2 que dice:
>>¿Cuántos días se puede retrasar la actividad a5 (renum: 6) sin afectar a la duración total del proyecto?

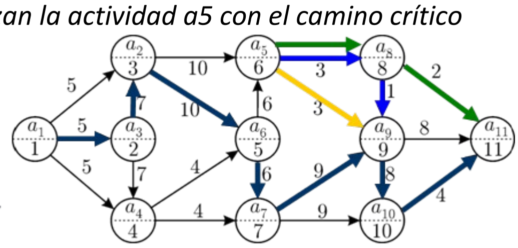
En general, ¿Cuánto tiempo se puede retrasar una actividad NO crítica sin que afecte a la duración del proyecto?
La actividad j puede retrasar a una actividad crítica k sii, existe un camino de j a k: Pjk
Suponemos que j se retrasa en x unidades de tiempo. Para que no haya retraso en el proyecto debe verificarse

$$u_j + \omega(P_{jk}) + x \leq u_k$$

donde ω(Pjk): Peso del camino Pjk

Sol: a la pregunta
consideramos los distintos caminos que enlazan la actividad a5 con el camino crítico

- Camino $P_{6,9}^{(1)}$: 6 9, con peso $\omega(P_{6,9}^{(1)}) = 3$.
- Camino $P_{6,9}^{(2)}$: 6 8 9, con peso $\omega(P_{6,9}^{(2)}) = 4$.
- Camino $P_{6,11}$: 6 8 11, con peso $\omega(P_{6,11}) = 5$.



$$
\left.\begin{array}{ll}
P_{6,9}^{(1)}: & u_6+\omega(P_{6,9}^{(1)})+x \leq u_9\\
P_{6,9}^{(2)}: & u_6+\omega(P_{6,9}^{(2)})+x \leq u_9\\
P_{6,11}: & u_6+\omega(P_{6,11})+x \leq u_{11}
\end{array}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{array}{l}
28+3+x \leq 37\\
28+4+x \leq 37\\
28+5+x \leq 49
\end{array}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{array}{l}
x \leq 6\\
x \leq 5\\
x \leq 16
\end{array}\right\} \Rightarrow x \leq 5
$$

Estas últimas ecuaciones corresponden a suponer que la actividad a5 se retrasa x días. Para que los tres caminos anteriores no retrasen el camino crítico se deben cumplir dichas desigualdades. Luego resolviendo las inecuaciones tenemos que el máximo retraso permitido de la actividad a5 para que no retrase el proyecto: 5 días